

Mit der GREENschen Funktion

$$H_l(r, r') = k[j_l(kr') n_l(kr) - j_l(kr) n_l(kr')] \quad \text{für } r' < r, \\ = \qquad \qquad \qquad 0 \qquad \qquad \qquad \text{für } r' > r$$

ergibt sich als Lösung der Gl. (A 17)

$$\omega_{k,l,m}^K(r) = A_{l,m}^K(k) \int_{\mathcal{C}}^r H_l(r, r') f_{l,m}^K(r') r' dr' = A_{l,m}^K(k) u_{k,l,m}^K(r). \quad (\text{A } 18)$$

Wenn man $\omega_{k,l,m}^K(r)$ nach Gl. (A 18) berechnet hat, kann man aus dem geforderten asymptotischen Verhalten von $\omega_{k,l,m}^K(r)$ einen Ausdruck für $A_{l,m}^K(k)$ gewinnen (siehe dazu BETHE und GOLDSSTONE²). Aber es ist leichter (besonders wenn man $l > 0$ betrachtet), $A_{l,m}^K(k)$ aus der Integralgleichung Gl. (A 14) mit der Nebenbedingung $\omega_{k,l,m}^K(c) = 0$ zu gewinnen.

Dabei erhält man

$$A_{l,m}^K(k) = \frac{\pi}{2c} j_l(k c) \left\{ G_l(c, c; k) + \frac{1}{c} \int_0^c r' dr' G_l(c, r'; k) q_{l,m}^K(r') - \frac{(-1)^m}{2\pi^{1/2}} \left[G_u^0(c, c; k, K) + \frac{1}{c} \int_0^c r' dr' G_u^0(c, r'; k, K) q_{l,m}^K(r') \right] \right\}^{-1}. \quad (\text{A } 19)$$

Das α -Spektrum aus dem Zerfall des Li⁸*

Von JÁNOS DARVAS

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Universität Göttingen
(Z. Naturforsch. 18 a, 569–576 [1963]; eingegangen am 16. Januar 1963)

The energy distribution of α -particles from the $\beta\text{-}\alpha$ -decay of Li⁸ over the first excited state of Be⁸ can be determined by means of the normalization integral over the $\alpha\text{-}\alpha$ -scattering solution. Relating the relevant part of this integral to the phase shift, the α -spectrum may be obtained using one phenomenological parameter only. The calculation gives a correct fit to the experimental energy distribution, excepting a small region around the maximum.

Der β -Zerfall des Li^8 führt zu einem breiten angeregten Zustand des Be^8 (mit dem Drehimpuls $J=2$), der anschließend in zwei α -Teilchen zerfällt. Infolge der kurzen Zerfallszeit des angeregten Niveaus von Be^8 besitzen die α -Teilchen ein kontinuierliches Energiespektrum, das unmittelbar auf die Energieunschärfe des zerfallenden Zustandes zurückzuführen ist. Die relative kinetische Energie der α -Teilchen wird durch die Energieabhängigkeit a) des Matrixelementes des β -Überganges (die Wellenfunktion des Endzustandes ist energieabhängig) und b) des Phasenraumfaktors bestimmt.

Den Zusammenhang zwischen dem β - und dem α -Spektrum haben GRIFFY und BIEDENHARN¹ in einer neueren Arbeit untersucht. Sie formulieren das Problem im Rahmen der WIGNERSchen Theorie der Kernreaktionen und bestimmen auf Grund der formalen Umkehrbarkeit des β - α -Zerfallsprozesses die Dichte

der Zustände des Be^{8^*} -Niveaus zu $(\sin^2 \delta_2)/P_\alpha$. Dabei ist δ_2 die Phasenverschiebung der α - α -Streuung mit relativem Drehimpuls $L=2$, P_α ist der „Durchdringungsfaktor“ für α -Teilchen. P_α wird mit einer halbempirischen Begründung eingeführt.

Die Phasenverschiebung δ_2 und der „Durchdringungsfaktor“ P_a enthalten keine wesentlich voneinander verschiedene physikalische Information. In der vorliegenden Arbeit wird das α -Spektrum unter Hinweis auf diese Feststellung weitgehend modellunabhängig und unter Verwendung eines einzigen adjustierbaren Parameters diskutiert. Die Untersuchung des α -Spektrums wird in zwei Schritten durchgeführt. Im ersten Schritt geben wir die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit für den β -Übergang an, die die Störungsrechnung liefert. Dabei wird der Grundzustand des Li^8 als energetisch fester Anfangszustand angenommen². Für den mit der Energie veränder-

* D 7.

¹ T. A. GRIFFY u. L. C. BIEDENHARN, Nucl. Phys. 15, 636 [1960].

² Diese Annahme wird durch die relativ große Halbwertszeit des β -Zerfalls von Li⁸ gerechtfertigt.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht:
Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

lichen Endzustand setzen wir die asymptotisch richtig normierte α - α -Streulösung ein. Im zweiten Schritt berechnen wir die Energieabhängigkeit des Matrixelementes aus dem Normierungsintegral über die Wellenfunktion der D-Streuung. Die obere Integrationsgrenze r_0 ist der adjustierbare Parameter. Die Wahl von r_0 ist jedoch, wie das im Abschnitt II noch erläutert werden soll, nach unten begrenzt und nach oben ebenfalls eingeschränkt.

Wir stellen dann eine Beziehung zwischen dem Normierungsintegral und der Phasenverschiebung δ der D-Streuung auf und gewinnen einen Ausdruck für die Energieverteilung der α -Teilchen als Funktion von δ . Auf diese Weise werden das Experiment des β - α -Zerfalles und das der α - α -Streuung miteinander verknüpft. Das Verfahren hat den Nachteil, daß es zur Zeit keine sehr genaue experimentelle Bestimmung von δ gibt.

In Abschnitt I werden die Experimente zur Bestimmung des α -Spektrums aus dem β -Zerfall des Li^8 , sowie der D-Phasenverschiebung der α - α -Streuung kurz besprochen. Der Abschnitt II enthält die theoretische Diskussion des α -Spektrums. Ein weiterer Abschnitt (III) ist den COULOMB-Funktionen und ihren Ableitungen nach dem Argument r und dem kontinuierlichen Parameter k (relativer Abstand und relative Wellenzahl der Teilchen) gewidmet. Diese Funktionen kommen in der oben erwähnten Beziehung zwischen Normierungsintegral und Phasenverschiebung vor. Schließlich wird im Abschnitt IV das Ergebnis der numerischen Auswertung diskutiert und mit dem Experiment verglichen.

I. Experimentelles

A. Zerfall des Li^8

Das Li^8 ist im Grundzustand β -instabil und zerfällt mit einer Halbwertszeit von 0,84 sec in den ersten angeregten Zustand des Be^8 , der anschließend mit einer

Halbwertszeit von $\sim 10^{-21}$ sec in zwei α -Teilchen zerfällt³. Der β -Zerfall des Li^8 wurde erstmalig von CRANE u. a.⁴ beobachtet, während LEWIS u. a.⁵ zum ersten Mal β - α -Emission feststellen konnten. Die beiden Spektren sind seither öfters untersucht worden, da man aus ihrem Zusammenhang Näheres über die Theorie des β -Zerfalls und über das Anregungsspektrum des Be^8 (l. c.⁷) zu erfahren hoffte.

Heute ist der Grundzustand des Li^8 , das Anregungsspektrum des Be^8 und das β - α -Zerfallsschema gut bekannt. Neuere Experimente weisen einstimmig darauf hin, daß das α -Spektrum aus einem breiten angeregten Zustand des Be^8 bei etwa 3 MeV hervorgeht⁸. Der Grundzustand des Li^8 und der erste angeregte Zustand des Be^8 haben beide den Gesamtdrehimpuls $J=2$ und gerade Parität³. Das Experiment von FARMER und CLASS bestätigt diese Daten und das in Abb. 1 dargestellte Zerfallsschema.

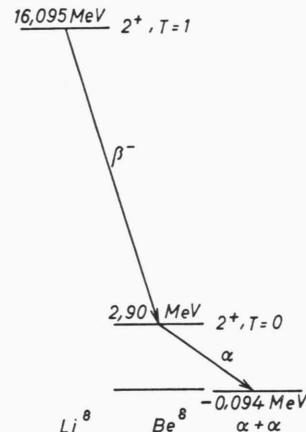


Abb. 1. Zerfallsschema des Li^8 .

Bei dem β -Zerfall handelt es sich um einen GAMOW-TELLER-Übergang ($\Delta T=1$), dessen Endzustand nicht scharf definiert ist. Der Verlauf der Energieverteilung der α -Teilen ist in Abb. 3 (Abschn. IV) dargestellt.

B. α - α -Streuung

Zur theoretischen Bestimmung des α -Spektrums ist die Kenntnis der Phasenverschiebung δ der α - α -Streuung mit relativem Drehimpuls $L=2$ als Funktion der

³ A. AJZENBERG-SELOVE u. T. LAURITSEN, Nucl. Phys. **11**, 1 [1959].

⁴ H. R. CRANE, L. A. DELSASSO, W. A. FOWLER u. C. C. LAURITSEN, Phys. Rev. **47**, 971 [1935].

⁵ W. B. LEWIS, W. E. BURCHAM u. W. Y. CHANG, Nature, Lond. **139**, 24 [1937].

⁶ D. S. BAYLEY u. H. R. CRANE, Phys. Rev. **52**, 24 [1937]. — L. H. RUMBAUGH, R. B. ROBERTS u. L. S. HAFSTAD, Phys. Rev. **51**, 1106 [1937]; **54**, 657 [1938].

⁷ G. BREIT u. E. WIGNER, Phys. Rev. **50**, 1191 [1937]; **51**, 593 [1937]. — W. A. FOWLER u. C. C. LAURITSEN, Phys. Rev. **51**, 1103 [1937]. — J. A. WHEELER, Phys. Rev. **59**, 27 [1941].

⁸ T. W. BONNER, J. E. EVANS, C. W. MALICH u. J. R. RISER, Phys. Rev. **73**, 885 [1948]. — F. C. GILBERT, Phys. Rev. **93**, 499 [1954]. — R. T. FROST u. S. S. HANNA, Phys. Rev. **99**, 8 [1955].

⁹ B. J. FARMER u. C. M. CLASS, Nucl. Phys. **15**, 626 [1960].

¹⁰ J. L. RUSSELL JR., G. C. PHILLIPS u. C. W. REICH, Phys. Rev. **104**, 135 [1956].

¹¹ C. M. JONES, G. C. PHILLIPS u. PH. D. MILLER, Phys. Rev. **117**, 135 [1960].

¹² J. R. DUNNING, A. M. SMITH u. F. E. STEIGERT, Phys. Rev. **121**, 580 [1961].

¹³ W. E. BURCHAM, J. S. MCKEE, W. M. GIBSON, D. BREDIN, D. EVANS, D. J. PROWSE u. J. ROTBLAT, Proc. Int. Conf. Nucl. Phys., Paris 1958, S. 366.

Streuenergie erforderlich. Wir haben diese Daten dem Experiment entnommen und eine glatte Kurve durch die Meßpunkte gelegt (Abb. 2). In dem Energienbereich $E < 3$ MeV haben wir dabei vorwiegend die Daten von RUSSELL, PHILLIPS und REICH¹⁰, in der Umgebung von $E = 3$ MeV die Daten von JONES, PHILLIPS und MILLER¹¹ berücksichtigt und die Kurve mit den Daten von DUNNING¹² und BURCHAM u. a.¹³ ergänzt. Die Meßgenauigkeit ist bei niedrigen Energien relativ groß, schwankt jedoch zwischen 2,5 MeV und 6 MeV erheblich^{11, 12}.

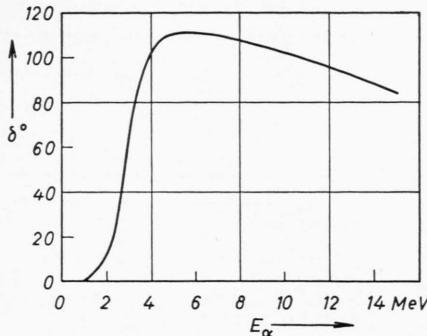


Abb. 2. Phasenverschiebung für die $\alpha\text{-}\alpha$ -Streuung, $L=2$, als Funktion der α -Energie E_α im Schwerpunktssystem.

II. Das α -Spektrum

Sehen wir von dem Rückstoß des Be^{8*}-Kernes ab, so fliegen die beiden α -Teilchen im Laborsystem mit gleicher kinetischer Energie und unter 180° weg. (Die maximale Rückstoßenergie errechnet sich bei einer maximalen β -Energie von etwa 13 MeV zu 11,4 keV¹⁴, die Abweichung von der Kollinearität ist etwa 7° ¹⁵.) Die gesamte, bei dem Prozeß $\text{Li}^8 \xrightarrow{\beta^-} \text{Be}^{8*} \xrightarrow{\alpha} \alpha$ freiwerdende Energie Q beträgt 16,095 MeV. Der relative Drehimpuls der α -Teilchen ist $L=2$ (s. auch Abb. 1).

Die Energiebilanz lautet

$$Q = E_\alpha + E_\beta + E_\nu.$$

Dabei bedeutet E_α die Summe der kinetischen Energien der beiden α -Teilchen

$$E_\alpha = \hbar^2 k^2 / m_\alpha,$$

E_β ist die Energie des wegfliegenden Elektrons und E_ν die Energie des Neutrinos.

Wir betrachten zunächst den ersten Teil des Prozesses: $\text{Li}^8 \xrightarrow{\beta^-} \text{Be}^{8*}$. Für die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit liefert die Störungsrechnung

¹⁴ K. H. LAUTERJUNG, B. SCHIMMER, U. SCHMIDT-ROHR u. H. MAIER-LEIBNITZ, Z. Phys. **155**, 547 [1959].

in erster Näherung folgenden Ausdruck

$$\frac{d^2W(E_\alpha, E_\beta)}{dE_\alpha dE_\beta} = \frac{2\pi}{\hbar^2} |(\Psi_b, H_w \Psi_a)|^2 \cdot (E_\beta^2 - m_\beta^2 c^4)^{1/2} (Q - E_\alpha - E_\beta)^2 E_\beta, \quad (1)$$

H_w ist der Wechselwirkungsanteil des HAMILTON-Operators, der für den Übergang verantwortlich ist, und den wir hier nicht näher anzugeben brauchen. Ψ_a steht für die Wellenfunktion des energetisch festen Grundzustandes von Li⁸ und Ψ_b für die Wellenfunktion des mit der Energie variablen ersten angeregten Zustandes von Be⁸. Es ist also

$$\Psi_b = \Psi_b(\mathbf{r}, E_\alpha)$$

(\mathbf{r} bedeutet alle Koordinaten des Konfigurationsraumes für die acht Teilchen im Be^{8*}-Kern). Ψ_b existiert nur als Streuzustand und muß für die Störungsrechnung, die zu Gl. (1) führt, bezüglich der Energie normiert sein, d. h.,

$$\int \Psi_b^*(\mathbf{r}, E_\alpha) \Psi_b(\mathbf{r}, E'_\alpha) d\tau = \delta(E_\alpha - E'_\alpha). \quad (2)$$

In dem Gebiet, wo die beiden Wellenfunktionen Ψ_b und Ψ_a überlappen – bis zum Kernrand oder wenig darüber hinaus, da die Wellenfunktion des Li⁸ gut lokalisiert ist – hängt Ψ_b , außer einem energieabhängigen Amplitudenfaktor, nur sehr schwach von E_α ab. Wir machen daher in diesem Gebiet den Ansatz

$$\Psi_b(\mathbf{r}, E_\alpha) = I(E_\alpha) \psi(\mathbf{r}). \quad (3)$$

Nach Abspaltung des energieabhängigen Amplitudenfaktors $I(E_\alpha)$ schreiben wir Gl. (1) :

$$\frac{d^2W(E_\alpha, E_\beta)}{dE_\alpha dE_\beta} \sim E_\beta (E_\beta^2 - m_\beta^2 c^4)^{1/2} \cdot (Q - E_\alpha - E_\beta)^2 |I(E_\alpha)|^2. \quad (4)$$

Man erhält aus Gl. (4) das β -Spektrum durch Integration über E_α [$N_\beta(E_\beta)$ ist die Anzahl der Elektronen im Energieintervall um E_β]

$$N_\beta(E_\beta) \sim E_\beta (E_\beta^2 - m_\beta^2 c^4)^{1/2} \cdot \int_0^{Q-E_\beta} (Q - E_\alpha - E_\beta)^2 |I(E_\alpha)|^2 dE_\alpha \quad (5)$$

und das α -Spektrum durch Integration über E_β [$N_\alpha(E_\alpha)$ ist die Anzahl der α -Paare im Energieintervall um E_α]

$$N_\alpha(E_\alpha) \sim Z(E_\alpha) |I(E_\alpha)|^2 \quad (6)$$

¹⁵ J. H. D. JENSEN, Lectures in Theoretical Physics II, Boulder 1960, Interscience Publishers Inc., New York 1961.

mit

$$\begin{aligned}
 Z(E_a) &= \int_{m_\beta c^2}^{Q-E_a} E_\beta (E_\beta^2 - m_\beta^2 c^4)^{1/2} (Q - E_a - E_\beta)^2 dE_\beta \\
 &= -\frac{2}{15} [(Q - E_a)^2 - m_\beta^2 c^4]^{5/2} \\
 &\quad + \frac{1}{6} (Q - E_a)^2 [(Q - E_a)^2 - m_\beta^2 c^4]^{3/2} \\
 &\quad - \frac{1}{4} (Q - E_a)^2 (m_\beta c^2)^2 - [(QE_a)^2 - m_\beta^2 c^4]^{1/2} \\
 &\quad + \frac{1}{4} (Q - E_a) (m_\beta c^2)^4 \\
 &\quad \cdot \ln \left[\frac{1}{m_\beta c^2} \left(Q - E_a - \sqrt{(Q - E_a)^2 - m_\beta^2 c^4} \right) \right]. \tag{7}
 \end{aligned}$$

Der Proportionalitätsfaktor in Gl. (4), bzw. in Gln. (5) und (6) enthält keine Energieabhängigkeit und ist daher für den Zusammenhang der beiden Spektren unwichtig.

Bei der Bestimmung von $|I(E_a)|^2$ wollen wir die $\alpha\text{-}\alpha$ -Streuung als Zweikörperproblem ansehen und die Schwerpunktsbewegung abspalten. Sei $R(r)$ der Radialanteil der Wellenfunktion der Relativbewegung und $u(r) = r R(r)$, ferner

$$u^\pm(r) = G(r) \pm i F(r), \tag{8}$$

wobei $G(r)$ bzw. $F(r)$ die irreguläre bzw. die reguläre COULOMB-Funktion ist¹⁶. Dann hat

$$u(r) = \frac{1}{V^k} [u^-(r) - e^{2i\delta} u^+(r)] \tag{9}$$

bei der üblichen asymptotischen Normierung der COULOMB-Funktionen [Gl. (17)] bis auf konstante Faktoren die für Ψ_b in Gl. (2) geforderte Normierung. Die Energieabhängigkeit von $|\langle \Psi_b, H_w \Psi_a \rangle|^2$ gewinnt man vermöge der Aufspaltung nach Gl. (3) aus dem Normierungsintegral über die Streulösung $u(r)$:

$$|I(E_a)|^2 \sim \int_0^{r_0} |u(r, E_a)|^2 dr. \tag{10}$$

Die obere Integrationsgrenze r_0 darf dabei nicht unendlich werden, da das Integral dann divergieren würde. Man muß bei der Wahl von r_0 einerseits beachten, daß die Faktorisierung nach Gl. (3) nur wenig über den Bereich der Kernkräfte hinaus gültig

¹⁶ Definiert wie bei F. L. YOST, J. A. WHEELER u. G. BREIT, Phys. Rev. **49**, 174 [1936]. Hier wie im folgenden lassen wir den Index zur Kennzeichnung des relativen Drehimpulses $L=2$ der Einfachheit halber weg.

¹⁷ G. LÜDERS, Z. Naturforsch. **10a**, 581 [1955].

¹⁸ E. CORINALDESI u. S. ZIENAU, Proc. Camb. Phil. Soc. **52**, 599 [1956].

sein kann; andererseits wollen wir r_0 so festlegen, daß für die Wellenfunktion $u(r)$ bei $r \geq r_0$ die Lösungen der SCHRÖDINGER-Gleichung außerhalb der Reichweite der Kernkräfte eingesetzt werden können. Bei dieser Wahl läßt sich nämlich das Normierungsintegral über eine einfache Beziehung durch die Phasenverschiebung δ und die bekannten Funktionen $G(r)$ und $F(r)$ ausdrücken. Wir geben im folgenden eine kurze Herleitung dieser Beziehung an, die für ungeladene Teilchen in einer Arbeit von LÜDERS¹⁷ für Drehimpuls $L=0$ und von CORINALDESI und ZIENAU¹⁸ für beliebige Drehimpulse angegeben wurde, und eine Verschärfung der WIGNERSchen Ungleichung für die Ableitung der Phasenverschiebung nach der Energie darstellt¹⁹. Die oben vorgenommene Beschränkung auf das Zweikörperproblem ist dabei unwesentlich²⁰.

Mit $\varepsilon = (m_a/\hbar^2) E_a = k^2$ und $w(r) = (m_a/\hbar^2) V(r)$ gilt für den Streuprozeß

$$u_\varepsilon'' + (\varepsilon - w) u_\varepsilon = 0, \tag{11 a}$$

$$u_{\varepsilon'}'' + (\varepsilon' - w) u_{\varepsilon'}^* = 0 \tag{11 b}$$

(die Striche stehen für Ableitungen nach r).

Multiplizieren wir Gl. (11 a) mit $u_{\varepsilon'}^*$, Gl. (11 b) mit u_ε , subtrahieren die beiden Gleichungen und integrieren unter Anwendung des GREENSchen Satzes:

$$(\varepsilon' - \varepsilon) \int_0^{r_0} u_{\varepsilon'}^* u_\varepsilon dr = [u'_\varepsilon u_{\varepsilon'}^* - u_{\varepsilon'}^* u_\varepsilon]_0^{r_0}.$$

Für kleine $\varepsilon' - \varepsilon = \Delta\varepsilon$ entwickeln wir die rechte Seite dieser Gleichung:

$$\begin{aligned}
 \Delta\varepsilon \int_0^{r_0} u_{\varepsilon'}^* u_\varepsilon dr &= [u'_\varepsilon u_{\varepsilon'}^* u_{\varepsilon'}^{**} u_\varepsilon]_0^{r_0} \\
 &\quad + \Delta\varepsilon \left[u_{\varepsilon'} \frac{\partial u_{\varepsilon'}^*}{\partial \varepsilon} - u_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon^{**}}{\partial \varepsilon} \right]_0^{r_0} + \dots .
 \end{aligned}$$

Die erste Klammer der rechten Seite verschwindet, da die WRONSKI-Determinante nicht von r abhängt. Im Grenzfall $\Delta\varepsilon \rightarrow 0$ und unter Beachtung der Randbedingungen

$$u(0) = 0, (\partial u / \partial \varepsilon)_{r=0} = 0 \quad \text{folgt}$$

$$\int_0^{r_0} |u_\varepsilon|^2 dr = \left[u'_\varepsilon \frac{\partial u_{\varepsilon'}^*}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial u_\varepsilon^{**}}{\partial \varepsilon} u_\varepsilon \right]_{r=r_0}. \tag{12}$$

¹⁹ E. WIGNER, Phys. Rev. **98**, 145 [1955].

²⁰ Wir geben im Anhang, ausgehend von einer früheren privaten Mitteilung E. WIGNERS an G. LÜDERS, eine Herleitung dieser Beziehung mit Hilfe des Formalismus der R -Matrixtheorie, wobei die Verallgemeinerung auf das A-Teilchenproblem sofort einsichtig ist.

Setzen wir Gln. (9) und (8) in die rechte Seite der Gl. (12) ein, und beachten wir noch, daß

$$W(G, F) \equiv GF' - FG' = k,$$

$$W(u^-, u^+) = 2ik$$

gilt, dann ergibt sich der Ausdruck

$$\int_0^{r_0} |u_\varepsilon|^2 dr = \frac{1}{k} \left[2 \frac{d\delta}{dk} + A(k) \cos 2\delta + B(k) \sin 2\delta + D(k) \right]. \quad (13)$$

Dabei ist

$$A(k) = \frac{1}{k} [(Gg' - gG') - (Ff' - fF')]_{r=r_0}, \quad (14a)$$

$$B(k) = \frac{1}{k} [(F'g - Fg') - (G'f - Gf')]_{r=r_0}, \quad (14b)$$

$$D(k) = -\frac{1}{k} [(Gg' - gG') + (Ff' - fF')]_{r=r_0} \quad (14c)$$

$$\text{mit } f \equiv \frac{\partial F}{\partial k}, \quad f' \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial k} \quad \text{usw.}$$

Wir erhalten das α -Spektrum nach Einsetzen der Gln. (7) und (13) in Gl. (6). Die COULOMB-Funktionen und ihre Ableitungen können aus den für die jeweiligen Energieintervalle geeigneten Reihenentwicklungen berechnet werden. Die Phasenverschiebung entnehmen wir dem Experiment. Zusätzlich sei noch bemerkt, daß wir die COULOMB-Korrektion zum β -Zerfall bei unseren Rechnungen nicht berücksichtigt haben.

III. Berechnung der Coulomb-Funktionen und ihrer Ableitungen

Zur Berechnung der in Gl. (14) vorkommenden Größen gehen wir zweckmäßig zu den dimensionslosen Variablen

$$\varrho = kr; \quad \eta = c/k \quad (15)$$

über. Dabei ist

$$k^2 = (m_a/\hbar^2) E_a = \varepsilon, \\ c = \frac{1}{2} \frac{4e^2 m_a}{\hbar^2} = 0,2757 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^{-1}.$$

Die Funktionen $F(\varrho, \eta)$ und $G(\varrho, \eta)$ sowie ihre Linearkombination $u(\varrho, \eta)$ [s. Gl. (13)] erfüllen jetzt die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u}{d\varrho^2} + \left(1 - \frac{2\eta}{\varrho} - \frac{6}{\varrho^2} \right) u = 0. \quad (16)$$

²¹ A. S. MELIGY, Nucl. Phys. 1, 610 [1956].

Die COULOMB-Funktionen haben asymptotisch die folgende Gestalt:

$$F(\varrho, \eta) \cong \sin[\varrho - \eta \ln 2\varrho + \sigma(\eta) - \pi], \quad (17a)$$

$$G(\varrho, \eta) \cong \cos[\varrho - \eta \ln 2\varrho + \sigma(\eta) - \pi], \quad (17b)$$

$\sigma(\eta)$ ist die reine COULOMB-Phasenverschiebung für den Drehimpuls $L=2$.

Von den acht Funktionen in Gl. (14) lassen sich zwei durch die übrigen sechs ausdrücken. Aus

$$G \frac{\partial F}{\partial \varrho} - F \frac{\partial G}{\partial \varrho} = 1 \quad (18)$$

$$\text{folgt } \frac{\partial G}{\partial \varrho} = \frac{1}{F} \left(G \frac{\partial F}{\partial \varrho} - 1 \right) \quad (19)$$

sowie durch Ableitung nach η

$$\frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{\partial G}{\partial \eta} = \frac{1}{F} \left[\frac{\partial F}{\partial \varrho} \frac{\partial G}{\partial \eta} + G \frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{\partial F}{\partial \eta} - \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{1}{F} \left(G \frac{\partial F}{\partial \varrho} - 1 \right) \right]. \quad (20)$$

Die übrigen sechs Funktionen

$$F, G, \frac{\partial F}{\partial \varrho}, \frac{\partial F}{\partial \eta}, \frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{\partial F}{\partial \eta}, \frac{\partial G}{\partial \eta}$$

berechnen wir mit Hilfe von Reihenentwicklungen, die in dem Energiebereich von 1–15 MeV genügend schnell konvergieren.

Nach Gl. (17) ist

$$\varrho = 0,3096 \cdot \frac{r_0}{10^{-13} \text{ cm}} \sqrt{E_a/\text{MeV}}; \quad \eta = \frac{0,8911}{\sqrt{E_a/\text{MeV}}},$$

r_0 ist dabei die obere Integrationsgrenze in $|I(E_a)|^2$, [Gl. (15)], E_a ist die Summe der kinetischen Energien beider α -Teilchen. Bei $r_0 = 5 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ sind die interessierenden Intervalle

$$1,547 \leq \varrho \leq 5,993; \quad 0,2300 \leq \eta \leq 0,8911.$$

Da die Höhe der COULOMB- und Zentrifugalbarriere etwa 4 MeV beträgt, können wir wegen des Aneinanderrückens der klassischen Umkehrpunkte gerade in dem kritischen Bereich, in dem die Resonanz der $N_\alpha(E_a)$ -Kurve liegt (etwa bei 3 MeV), die sonst so bequeme JWKB-Näherung nicht anwenden.

Eine Reihenentwicklung, die für kleine η gut konvergiert, ist von MELIGY angegeben worden^{21, 22}:

$$F_L(\varrho, \eta) = \frac{1}{2} A_L(\eta) J_{\eta, L+1/2}(2\varrho), \quad (21)$$

$$G_L(\varrho, \eta) = -\frac{\pi}{A_L(\eta)} Y_{\eta, L+1/2}(2\varrho) \quad (22)$$

²² A. S. MELIGY, Nucl. Phys. 5, 615 [1958].

$$\text{mit } J_{\eta, m}(2 \varrho) = (2 \pi \varrho)^{1/2} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{i^{\nu+1} \eta \Gamma(i \eta + \frac{1}{2} \nu) (2 \varrho)^{\nu/2}}{\nu! \Gamma(i \eta - \frac{1}{2} \nu + 1) \Gamma(\frac{1}{2} + m + \frac{1}{2} \nu)} J_{\nu/2+m}(\varrho), \quad (23)$$

$$\pi Y_{\eta, m}(2 \varrho) = i^{2m} \frac{\Gamma(i \eta + \frac{1}{2} + m)}{\Gamma(i \eta + \frac{1}{2} - m)} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left\{ [\frac{1}{2} \psi(m + \frac{1}{2} + i \eta) + \frac{1}{2} \psi(m + \frac{1}{2} - i \eta) + \ln 2 \varrho - \psi(2m) - \psi(2m + 1)] J_{\eta, m}(2 \varrho) \right. \\ & \left. - \frac{(2 \varrho)^m}{\Gamma(2m)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(2 \varrho)^{\mu/2}}{\mu!(2m+\mu)^2} i^{\mu} \frac{\Gamma(i \eta + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \mu)}{\Gamma(i \eta + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \mu)} J_{\eta, \mu/2}(2 \varrho) \right\} \\ & - \frac{\Gamma(2m+1)}{(2 \varrho)^m} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(2 \varrho)^{\mu/2}}{\mu!(2m-\mu)} i^{\mu} \frac{\Gamma(i \eta + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \mu)}{\Gamma(i \eta + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \mu)} J_{\eta, \mu/2}(2 \varrho), \end{aligned}$$

$$A_L(\eta) = |\Gamma(L+1+i\eta)| \exp\{-(\pi/2)\eta\}. \quad (25)$$

J_λ sind die BESSEL-Funktionen²³, $\psi(z)$ ist die logarithmische Ableitung der Γ -Funktion $\Gamma(z)$, und der Strich in der letzten Summe in Gl. (24) bedeutet, daß das Glied $2m=\mu$ auszulassen ist²⁴.

Wenn die Koeffizienten der BESSEL-Funktionen in Gl. (23) und die der Funktionen $J_{\eta, \mu/2}(2 \varrho)$ in Gl. (24) durch Rekursionsformeln ausgedrückt werden, lassen sich die erforderlichen Differentiationen leicht durchführen. Für die numerische Auswertung sind die Rekursionsformeln ebenfalls bequem.

IV. Numerische Ergebnisse, Diskussion und Vergleich mit dem Experiment

Die Rechnungen zur numerischen Auswertung von Gl. (6) wurden auf einer elektronischen Rechenanlage IBM 650 ausgeführt. $|I(E_a)|^2$ wurde für verschiedene Werte des Parameters r_0 aus dem Bereich $4,3 \leq r_0/10^{-13} \text{ cm} \leq 6,0$ berechnet. Die Wahl von $r_0 = 5,0 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ ergab gute Übereinstimmung mit dem Experiment von FARMER und CLASS⁹. Dieser Wert ist etwas größer als der doppelte α -Radius ($4,7 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$), ist also auch nach den im Abschnitt II aufgestellten Kriterien ganz vernünftig. r_0 beeinflußt den Verlauf von $N_\alpha(E_a)$ bei niedrigen Energien erwartungsgemäß mehr als bei höheren [bei kleinen Energien ist die $G(r)$ -Funktion, auf die es bei der Auswertung von Gl. (13) hauptsächlich ankommt, vermöge ihres exponentiellen Anstiegs gegen kleine Veränderungen von r_0 sehr empfindlich].

²³ Definiert wie bei WHITTACKER u. WATSON, A Course of Modern Analysis, Kap. XVII, 4. Aufl., Cambridge University Press, Cambridge 1950.

²⁴ In der Arbeit von MELIGY²² fehlen die beiden Faktoren $\frac{1}{2}$ vor den ψ -Funktionen in der eckigen Klammer des Ausdruckes (24). In dem Handbuchartikel von M. H. HULL JR.

Die Werte der Phasenverschiebung δ haben wir dem Experiment entnommen (s. Abschnitt I) und die Ableitung $d\delta/dk$ graphisch bestimmt. Die Ungenauigkeit dieses Verfahrens ist gegenüber der Ungenauigkeit der experimentellen Bestimmung von $\delta(k)$ in fast dem gesamten interessierenden Energiebereich unerheblich.

Die Kurve in Abb. 3 zeigt die Ergebnisse der Rechnung. $N_\alpha(E_a)$ ist in Abhängigkeit von E_a/MeV aufgetragen. Zum Vergleich geben wir auch die Meß-

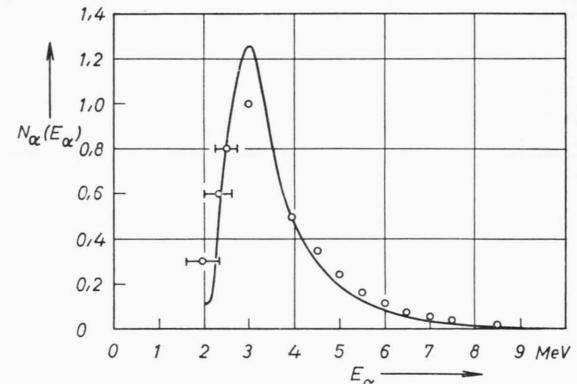


Abb. 3. Energieverteilung der α -Teilchen. ○ Meßpunkte von FARMER und CLASS (angepaßt bei $E=4$ MeV).

punkte von FARMER und CLASS (angepaßt bei $E_a=4$ MeV) an. Die Übereinstimmung ist bis auf den schmalen Bereich um die Spitze der Resonanz ($E_a \approx 3$ MeV), wo $N_\alpha(E_a)$ hauptsächlich durch $d\delta/dk$ bestimmt wird, zufriedenstellend. Wegen der schnellen Änderung der Phasenverschiebung in die-

u. G. BREIT (Hdb. Phys. XLI/1, S. 434 f.) wird die MELIGY-Formel ebenfalls mit diesem Fehler zitiert. Wir möchten auch darauf hinweisen, daß in dem gleichen Artikel die reguläre COULOMB-Funktion in der MELIGY-Formel unrichtig normiert ist: $F_L = 2^{-L-1} c_L \Gamma(2L+2) J_{\eta, L+1/2}(2 \varrho)$ muß es dort, in Übereinstimmung mit MELIGY²³, heißen.

sem Bereich setzen sich die Meßfehler bei der Bestimmung von $\delta(k)$ in besonders große Ungenauigkeiten der errechneten $d\delta/dk$ - und folglich der $N_a(E_a)$ -Werte um. Der Meßwert von FARMER und CLASS für $N_a(E_a)$ bei $E_a = 3$ MeV liegt jedoch in jedem Falle außerhalb der Ungenauigkeitsgrenze, die Unstimmigkeit kann also nicht allein auf die Meßfehler bei $\delta(k)$ zurückgeführt werden.

An den beiden Enden des betrachteten Energieintervalls 0 – 15 MeV geht $N_a(E_a)$ mit $|I(E_a)|^2$ bzw. mit $Z(E_a)$ gegen Null [für $E_a=0$ wird $\delta(k)$ sowie $(1/k)(d\delta/dk)$ Null; aus Gl. (13) folgt, daß dann auch $|I(E_a)|^2$ Null wird].

Ich möchte an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. G. LÜDERS für ständige Anregungen und viele wertvolle Diskussionen herzlich danken. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für die Möglichkeit, die elektronische Rechenmaschine IBM 650 in der Aerodynamischen Versuchsanstalt in Göttingen zu benutzen; den Mitarbeitern des Rechenzentrums bin ich für viele praktische Hinweise bei der Durchführung der Rechnungen zu Dank verpflichtet.

Anhang

Für die Herleitung der Beziehung (13) ist die Beschränkung auf das Zweikörperproblem nicht wesentlich. Wir wollen diese Beziehung auf einem anderen Wege gewinnen als in Abschnitt II, um das Resultat leichter auf das A-Teilchenproblem verallgemeinern zu können [s. dazu Anmerkung 21].

1. Das Normierungsintegral bei der eindimensionalen Streuung

In dem Gebiet $r \leq b$, wo das Kernpotential von Null verschieden ist (Gebiet I), gilt

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{2M}{\hbar^2}(E-V)v = 0, \quad v(0) = 0. \quad (\text{A.1})$$

Für $r > b$ (Gebiet II) haben wir im allgemeinen Fall eine Linearkombination $u(r)$ zwischen einer einlaufenden und einer auslaufenden COULOMB-Welle. Die Anschlußbedingungen lauten

$$v(b, k) = u(b, k), \quad v'(b, k) = u'(b, k), \quad (\text{A.2})$$

wobei $k^2 = (2M/\hbar^2)E$ als kontinuierlicher Parameter aufzufassen ist. Wir entwickeln $v(r, k)$:

$$v(r, k) = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \chi_{\lambda}(r) \quad (\text{A.3})$$

nach dem im Gebiet I vollständigen Orthogonalsystem χ_{λ} , definiert in diesem Gebiet durch das Eigenwertproblem

$$\frac{d^2\chi_{\lambda}}{dr^2} + \frac{2M}{\hbar^2}(E_{\lambda}-V)\chi_{\lambda} = 0, \quad \left(\frac{d\chi_{\lambda}}{dr}\right)_{r=b} = 0. \quad (\text{A.4})$$

Aus der Orthogonalitätsbedingung für die Funktionen χ_{λ} folgt

$$\int_0^b |v|^2 dr = \sum_{\lambda} |a_{\lambda}|^2. \quad (\text{A.5})$$

Multiplizieren wir Gl. (A.1) mit χ_{λ}^* und die zu (A.4) konjugiert komplexe Gleichung mit v , subtrahieren und integrieren über das Gebiet I, so erhalten wir

$$\frac{2M}{\hbar^2}(E-E_{\lambda})a_{\lambda} + [v' \chi_{\lambda}^* - v \chi_{\lambda}^*]_0^b. \quad (\text{A.6})$$

$$\text{bzw. } a_{\lambda} = \frac{\hbar^2}{2M} \frac{\chi_{\lambda}^*(b)}{E_{\lambda}-E} v'(b) - \sqrt{\frac{\hbar^2}{2M}} \frac{\gamma_{\lambda}}{E_{\lambda}-E} v'(b). \quad (\text{A.7})$$

Setzen wir nun a_{λ} in die Entwicklung (A.3) ein, und bilden wir die reziproke logarithmische Ableitung von $v(r)$ an der Stelle $r=b$:

$$\left(\frac{v}{v'}\right)_{r=b} \sum_{\lambda} = \frac{|\gamma_{\lambda}|^2}{E_{\lambda}-E} \equiv R. \quad (\text{A.8})$$

Bilden wir jetzt die Ableitung von R nach E :

$$\frac{dR}{dE} = \sum_{\lambda} \left| \frac{\gamma_{\lambda}}{E_{\lambda}-E} \right|^2 = \frac{2M}{\hbar^2} \frac{1}{|v'(b)|^2} \sum_{\lambda} |a_{\lambda}|^2. \quad (\text{A.9})$$

Aus Gln. (A.9), (A.7) und (A.5) bekommen wir folgenden Ausdruck für das Normierungsintegral:

$$\int_0^b |v|^2 dr = \frac{1}{2k} \frac{1}{R} \frac{dR}{dE} [v(b) v''(b)]. \quad (\text{A.10})$$

Wir machen jetzt von den Randbedingungen (A.2) Gebrauch, setzen u aus Gl. (9) ein und benutzen die Beziehung

$$\operatorname{tg} \delta = (R F' - F) / (G - R G'). \quad (\text{A.11})$$

Wir erhalten damit aus Gl. (A.10) den Ausdruck (13):

$$\int_0^b |v|^2 dr = \frac{1}{k} \left[2 \frac{d\delta}{dk} + A(k) \cos 2\delta + B(k) \sin 2\delta + D(k) \right],$$

wobei $A(k)$, $B(k)$ und $D(k)$ durch Gl. (14) definiert sind.

2. Allgemeine Formulierung für das Vielteilchenproblem

Wir verallgemeinern jetzt das oben erwähnte Resultat auf das Problem für A-Teilchen und beliebige Kanäle. Zwischen dem Gebiet I und dem Gebiet II wird jetzt für den Kanal c die Trennungsfläche S_c eingeführt.

Das Orthogonalsystem X_{λ} sei durch das Eigenwertproblem

$$(H - E_{\lambda}) X_{\lambda} = 0, \quad D_{\lambda c}/V_{\lambda c} = 0 \quad (\text{A.12})$$

definiert, wobei $V_{\lambda c}$ der Wert der Funktion X_{λ} und $D_{\lambda c}$ der Wert ihrer Normalableitung auf S_c ist. Wir entwickeln die Wellenfunktion im Gebiet I, $\Psi(1, \dots, A)$, nach X_{λ} :

$$\Psi = \sum_{\lambda} A_{\lambda} X_{\lambda}. \quad (\text{A.13})$$

Unter der Annahme, daß der Schwerpunkt des Gesamtsystems ruht, läßt sich die Wellenfunktion im Gebiet II als das Produkt der Wellenfunktionen der relativen Bewegung und der inneren Bewegung der beiden Fragmente in c darstellen:

$$\Phi(1, \dots, A) = \frac{u_c(r)}{r} Y_c(\vartheta, \varphi) u(i). \quad (\text{A.14})$$

Wir definieren außerdem

$$\begin{aligned} V_c &= \sqrt{\frac{\hbar^2}{2 M_c b_c}} u_c(b_c), \\ D_c &= \sqrt{\frac{b_c \hbar^2}{2 M_c}} \left(\frac{du_c}{dr_c} \right)_{r_c=b_c} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Aus Gl. (A.13) erhalten wir

$$\begin{aligned} A_{\lambda} &= \frac{1}{E_{\lambda} - E} \sum_c (V_{\lambda c}^* D_c - V_c D_{\lambda c}^*) \\ &= \frac{1}{E_{\lambda} - E} \sum_c \gamma_{\lambda c} D_c \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

und schreiben die R-Matrix als

$$R_{cc'} = \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda c'} \gamma_{\lambda c}}{E_{\lambda} - E}. \quad (\text{A.17})$$

Jetzt können wir das Normierungsintegral im Gebiet I folgendermaßen ausdrücken:

$$\int_I |\Psi|^2 d\tau = \sum_{\lambda} |A_{\lambda}|^2 = \sum_{cc'} \frac{dR_{cc'}}{dE} D_c^* D_{c'}. \quad (\text{A.18})$$

Gl. (A.17) schreibt sich als Matrixgleichung

$$V = R D \quad (\text{A.19})$$

und nach Einsetzen in Gl. (A.18) folgt

$$\int_I |\Psi|^2 d\tau = \text{Spur} \left[D^* \frac{dR}{dE} R^{-1} V \right]. \quad (\text{A.20})$$

Man verifiziert leicht, daß dieser Ausdruck für $c=c'$ und $A=2$ in Gl. (13) übergeht.

Messungen des niederenergetischen γ -Spektrums von Cd¹¹⁴, Ho¹⁶⁶ und Eu¹⁵⁴ *

Von SEVERIN ORECHER

Aus dem Laboratorium für Technische Physik der Technischen Hochschule München
(Z. Naturforschg. 18 a, 576–579 [1963]; eingegangen am 6. Februar 1963)

Mit einem in DuMond-Anordnung arbeitenden RÖNTGEN-Spektrometer mit gebogenem Kristall (Quarz: 101-Ebene) wurden die beim Einfang thermischer Neutronen ausgesandten niederenergetischen γ -Linien von Cd¹¹⁴, Ho¹⁶⁶ und Eu¹⁵⁴ ausgemessen.

Die Arbeit stellt eine Fortsetzung früherer Untersuchungen dar^{1, 2}. Inzwischen sind die ersten Messungen mit einem Instrument mit wesentlich größerer Lichtstärke³ bekannt geworden. Ferner hat in Risö eine Arbeitsgruppe unseres Instituts ein Spektrometer aufgestellt, mit dem ebenfalls höhere Lichtstärken erreicht werden. In der vorliegenden Untersuchung wird deshalb nicht der Versuch gemacht, schwächste Linien noch nachzuweisen, sondern es werden die genauen Energien und Intensitäten für einzelne γ -Linien gemessen. Solche Messungen sind nützlich als Energie- und Intensitäts-Standard für umfangreichere Untersuchungen mit großen Spektrometern, bei denen gerade die Intensitätseichung einen großen, oft nicht vertretbaren Aufwand erfordern würde.

Versuchsanordnung

Den Messungen diente das an anderer Stelle^{1, 2} ausführlich beschriebene Spektrometer am Forschungsreaktor in Garching bei München. Um mit diesem recht lichtschwachen Gerät auch bei Kernen mit Einfangquerschnitten unter 100 barn die γ -Linien noch gut messen zu können, war es notwendig, den Untergrund möglichst stark zu unterdrücken. Dazu wurden die verstärkten Ausgangsimpulse des Multipliers einem Einkanal-diskriminatator zugeführt. Das Verhältnis von Reflexzähleraten zu Untergrundzählraten ist in dem uns zugänglichen Energiebereich am größten, wenn die Breite ΔU des Kanals im Diskriminatator etwa 1,6-mal⁴ so groß ist wie die Breite des Photopeaks der zu messenden Strahlung. Beim automatischen Suchen der Linien mußte die Kanallage des Diskriminators so nachgeregelt werden, daß sie der jeweiligen Energie des Reflexes entsprach. Für kleine Reflexionswinkel φ ist die Wellenlänge λ

² G. BUSCHHORN, Z. Naturforschg. 17 a, 241 [1961].

³ R. K. SMITHER, Phys. Rev. 124, 183 [1961].

⁴ Private Mitteilung von O. SCHULT.

* Dissertationsauszug, Technische Hochschule, München 1962.
1 O. SCHULT, Z. Phys. 158, 444 [1960] und Kerntechnik 7/8, 223 [1960].